Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 1

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -4 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[4,3,1,2]^{\mathsf{T}}, [3,2,0,1]^{\mathsf{T}}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[3,-2,6,3]^{\mathsf{T}}$ на линейную оболочку векторов $\langle[1,1,1,2]^{\mathsf{T}}$, $[1,0,1,-1]^{\mathsf{T}}$, $[2,1,2,1]^{\mathsf{T}}\rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \operatorname{tr}(A\overline{B}^T).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Доказать, что если подпространство L унитарного (или евклидова) пространства V инвариантно относительно линейного преобразования φ, то ортогональное дополнение $L^{\perp}$ инвариантно относительно сопряженного преобразования φ^*.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грама обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бо́льших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 2

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & -9 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 6 \\ -9 & -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[1,3,5,4]^{\mathsf{T}}, [1,2,3,3]^{\mathsf{T}}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[-4,-2,-1,8]^{\mathsf{T}}$ на линейную оболочку векторов $\langle [1,1,1,5]^{\mathsf{T}}$, $[1,-2,1,-1]^{\mathsf{T}}$, $[1,0,1,3]^{\mathsf{T}} \rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}\,(A\overline{B}^T).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Доказать, что если подпространство L унитарного (или евклидова) пространства V инвариантно относительно линейного преобразования φ, то ортогональное дополнение $L^{\perp}$ инвариантно относительно сопряженного преобразования φ^*.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грама обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 3

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 5 & 12 & -19 \\ 4 & 8 & -13 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 7 \\ 4 & 5 & -16 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -4 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[2,4,-1,2]^{\mathsf{T}}, [3,7,-2,5]^{\mathsf{T}}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[4,2,5,8]^{\mathsf{T}}$ на линейную оболочку векторов $\langle [1,1,1,1]^{\mathsf{T}}$, $[1,0,1,-1]^{\mathsf{T}}$, $[1,-2,1,-5]^{\mathsf{T}}\rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \operatorname{tr}(A\overline{B}^T).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Доказать, что если подпространство L унитарного (или евклидова) пространства V инвариантно относительно линейного преобразования φ, то ортогональное дополнение $L^{\perp}$ инвариантно относительно сопряженного преобразования φ^*.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -7 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грама обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бо́льших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 4

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -11 \\ 1 & 5 & -10 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[-2,1,2,3]^{\mathsf{T}}, [1,2,2,-2]^{\mathsf{T}}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[2,3,2,4]^{\mathsf{T}}$ на линейную оболочку векторов $\langle[2,-1,0,1]^{\mathsf{T}}$, $[1,-1,-2,1]^{\mathsf{T}}$, $[1,1,6,-1]^{\mathsf{T}}\rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}\,(A\overline{B}^T).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Доказать, что если подпространство L унитарного (или евклидова) пространства V инвариантно относительно линейного преобразования φ, то ортогональное дополнение $L^{\perp}$ инвариантно относительно сопряженного преобразования φ^*.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -12 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грама обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бо́льших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 5

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -7 & 0 & 5 \\ -5 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -15 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -8 & -5 & -4 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[-2,3,1,2]^\mathsf{T}, [-1,3,-1,4]^\mathsf{T}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[4,5,3,1]^\mathsf{T}$ на линейную оболочку векторов $\langle[1,2,1,1]^\mathsf{T}$, $[1,3,0,3]^\mathsf{T}$, $[1,1,2,-1]^\mathsf{T}\rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}\,(A\overline{B}^T).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Доказать, что если подпространство L унитарного (или евклидова) пространства V инвариантно относительно линейного преобразования φ, то ортогональное дополнение $L^\perp$ инвариантно относительно сопряженного преобразования φ^*.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грама обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бо́льших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 6

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 15 & 8 & 20 \\ 1 & 1 & 2 \\ -11 & -6 & -15 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} 2 & -8 & -5 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -13 & -8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & -1 & -8 \\ -4 & 2 & 8 \\ 4 & -1 & -6 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[2,1,2,-1]^{\mathsf{T}}, [2,4,-1,2]^{\mathsf{T}}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[4,5,3,1]^{\mathsf{T}}$ на линейную оболочку векторов $\langle[1,1,1,1]^{\mathsf{T}}$, $[1,0,2,3]^{\mathsf{T}}$, $[1,3,-1,-3]^{\mathsf{T}}\rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \operatorname{tr}(A\overline{B}^T).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Доказать, что если подпространство L унитарного (или евклидова) пространства V инвариантно относительно линейного преобразования φ, то ортогональное дополнение $L^{\perp}$ инвариантно относительно сопряженного преобразования φ^*.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грама обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бо́льших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 7

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4 & 8 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -4 & 10 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & -6 & -15 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 8 & -1 & -10 \\ -4 & 2 & 8 \\ 5 & -1 & -7 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[4,-2,5,1]^\mathsf{T}, [2,-1,3,-2]^\mathsf{T}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[3,6,3,4]^\mathsf{T}$ на линейную оболочку векторов $\langle[-1,1,1,1]^\mathsf{T}$, $[1,3,0,1]^\mathsf{T}$, $[2,2,-1,0]^\mathsf{T}\rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}\,(A\overline{B}^T).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Доказать, что если подпространство L унитарного (или евклидова) пространства V инвариантно относительно линейного преобразования φ, то ортогональное дополнение $L^\perp$ инвариантно относительно сопряженного преобразования φ^*.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 7 \\ -4 & 7 & 25 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грама обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)g(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бо́льших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 8

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 12 & 6 & 14 \\ -1 & 1 & -1 \\ -7 & -4 & -8 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[1,1,2,1]^{\mathsf{T}}, [1,2,3,1]^{\mathsf{T}}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[-2,8,3,-1]^{\mathsf{T}}$ на линейную оболочку векторов $\langle[1,-1,1,-1]^{\mathsf{T}}$ $[1,1,2,-1]^{\mathsf{T}}$, $[1,3,3,-1]^{\mathsf{T}}\rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \operatorname{tr}(A\overline{B}^T).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Доказать, что если подпространство L унитарного (или евклидова) пространства V инвариантно относительно линейного преобразования φ, то ортогональное дополнение $L^{\perp}$ инвариантно относительно сопряженного преобразования φ^*.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 12 & -2 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грама обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бо́льших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 9

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 & 4 & 8 \\ -3 & -1 & -4 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[3,-1,1,-1]^{\mathsf{T}}, [5,-1,0,1]^{\mathsf{T}}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[1,-7,5,-2]^{\mathsf{T}}$ на линейную оболочку векторов $\langle[1,2,1,3]^{\mathsf{T}}$, $[1,1,2,2]^{\mathsf{T}}$, $[1,0,3,1]^{\mathsf{T}}\rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \operatorname{tr}(A\overline{B}^T).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Доказать, что если подпространство L унитарного (или евклидова) пространства V инвариантно относительно линейного преобразования φ, то ортогональное дополнение $L^{\perp}$ инвариантно относительно сопряженного преобразования φ^*.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -7 & 2 & -9 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грама обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бо́льших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 10

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 10 & -10 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} 5 & -8 & -14 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[1,3,2,4]^\mathsf{T}, [2,4,3,5]^\mathsf{T}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[-1,8,-6,5]^\mathsf{T}$ на линейную оболочку векторов $\langle [2,-1,0,1]^\mathsf{T}$, $[1,0,-1,-1]^\mathsf{T}$, $[1,-1,1,2]^\mathsf{T} \rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \operatorname{tr}(A\overline{B}^T).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Доказать, что если подпространство L унитарного (или евклидова) пространства V инвариантно относительно линейного преобразования φ, то ортогональное дополнение $L^\perp$ инвариантно относительно сопряженного преобразования φ^*.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -8 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грама обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 11

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ -4 & -8 & -12 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[-2,1,-3,4]^\mathsf{T}, [-1,1,-4,4]^\mathsf{T}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[2,3,4,-1]^\mathsf{T}$ на линейную оболочку векторов $\langle[1,-2,2,-1]^\mathsf{T}$, $[1,-1,2,0]^\mathsf{T}$, $[1,0,2,1]^\mathsf{T}\rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}\,(A\overline{B}^T).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Доказать, что если подпространство L унитарного (или евклидова) пространства V инвариантно относительно линейного преобразования φ, то ортогональное дополнение $L^\perp$ инвариантно относительно сопряженного преобразования φ^*.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грама обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 12

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 8 & -12 & -3 \\ 4 & -6 & -2 \\ -4 & 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & 6 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[2,1,1,1]^\mathsf{T}, [1,3,2,2]^\mathsf{T}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[2,-5,9,7]^\mathsf{T}$ на линейную оболочку векторов $\langle[1,-1,3,2]^\mathsf{T}$, $[1,1,1,2]^\mathsf{T}$, $[1,3,-1,2]^\mathsf{T}\rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \operatorname{tr}(A\overline{B}^T).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Доказать, что если подпространство L унитарного (или евклидова) пространства V инвариантно относительно линейного преобразования φ, то ортогональное дополнение $L^\perp$ инвариантно относительно сопряженного преобразования φ^*.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грама обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 13

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -10 & -4 & 7 \\ 12 & 4 & -10 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & -4 \\ -5 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -7 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 11 & -3 & 8 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[-2,1,-4,3]^\mathsf{T},[-1,1,-3,3]^\mathsf{T}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[7,-9,1,3]^\mathsf{T}$ на линейную оболочку векторов $\langle[1,2,-1,2]^\mathsf{T}$, $[1,-3,1,1]^\mathsf{T}$, $[2,-1,0,3]^\mathsf{T}\rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от x^3-x до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B)=\operatorname{tr}(A\overline{B}^T).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Доказать, что если подпространство L унитарного (или евклидова) пространства V инвариантно относительно линейного преобразования φ, то ортогональное дополнение $L^\perp$ инвариантно относительно сопряженного преобразования φ^*.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax=b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грама обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)\leqslant g(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)g(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 14

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 8 & 3 & -7 \\ -4 & 0 & 6 \\ 8 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 8 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 8 & -2 & 4 \\ 12 & -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[4, 3, -5, 3]^\mathsf{T}, [2, 1, -2, 1]^\mathsf{T}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[1, 4, 5, 2]^\mathsf{T}$ на линейную оболочку векторов $\langle [1, 1, 1, 1]^\mathsf{T}$, $[1, 1, 2, 3]^\mathsf{T}$, $[1, 1, 0, -1]^\mathsf{T} \rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A, B) = \operatorname{tr}(A\overline{B}^T).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Доказать, что если подпространство L унитарного (или евклидова) пространства V инвариантно относительно линейного преобразования φ, то ортогональное дополнение $L^\perp$ инвариантно относительно сопряженного преобразования φ^*.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -6 \\ -3 & 2 & 4 \\ -5 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грама обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 15

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} -7 & 3 & -9 \\ -1 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -7 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[1,2,1,1]^\mathsf{T}, [3,1,-2,-2]^\mathsf{T}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[3,8,1,5]^\mathsf{T}$ на линейную оболочку векторов $\langle [1,-1,1,1]^\mathsf{T}$, $[1,2,3,1]^\mathsf{T}$, $[1,-4,-1,1]^\mathsf{T}\rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}\,(A\overline{B}^T).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Доказать, что если подпространство L унитарного (или евклидова) пространства V инвариантно относительно линейного преобразования φ, то ортогональное дополнение $L^\perp$ инвариантно относительно сопряженного преобразования φ^*.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грама обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?